Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Galaţi

Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”
ediţia a XVI-a
Galaţi, 31 octombrie 2015

Clasa a X-a

Problema 1.

Fie AP înălţime în triunghiul ΔABC, $P \in (BC)$ iar E şi F două puncte pe laturile (AB) şi respectiv (AC) astfel încât cercul de diametru $[EF]$ să intersecteze latura $[BC]$ în P.

a) Dacă notăm versorii vectorilor $\overrightarrow{PA}$ şi $\overrightarrow{PB}$ cu $\vec{u}$ şi respectiv $\vec{v}$ atunci exprimaţi vectorii $\overrightarrow{PE}$ şi $\overrightarrow{PF}$ în funcţie de $\vec{u}$ şi $\vec{v}$.

b) Demonstraţi relaţia $BE \cdot CF \cdot AP^2 = AE \cdot AF \cdot BP \cdot CP$.

Problema 2.

a) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia: $(x+1)^9 - x^{10} = 511$.

b) Fie numerele reale $x, y, z \in (0, \infty)$ cu $x + y + z = 1$ şi fie a un număr real, $a > 1$. Să se arate că :

$$\frac{27}{9 \cdot a^2 - 1} \leq \frac{1}{a^2 - x^2} + \frac{1}{a^2 - y^2} + \frac{1}{a^2 - z^2} \leq \frac{3 \cdot a^2 - 2}{a^2 \cdot \left(a^2 - 1\right)}$$

Problema 3.

Să se determine cel mai mic număr natural n astfel încât numărul zerourilor cu care se termină $(n+10)!$ să fie cu 2015 mai mare decât numărul zerourilor cu care se termină $n!$.(unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$)

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acordă maximum 7 puncte.
Nu se acordă nici un punct din oficiu. Fiecare teză va fi evaluată cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 2 ore 30 minute